Tentamen Quantum Fysica II, 30 juni '98

Opgave 1

Een deeltje beweegt in een sferisch symmetrische potentiaal. Zijn golffunctie heeft de vorm:

$$\phi(x,y,z) = C\,(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)\, f(|\vec{r}|) \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ constanten; } C \text{ normering})$$

Neem $\alpha = \beta = \gamma = 1$

a) Welke waarden van $\vec{L}^2, L_x, L_y, L_z$ kunnen bij meting gevonden worden en wat is de waarschijnlijkheid voor elk van deze waarden?

Neem nu $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 1$

b) Schrijf de operator L_z met behulp van poolcoordinaten in de vorm: $L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \varphi}$

c) Welke waarden van L_z kunnen bij meting gevonden worden en wat is de waarschijnlijk voor elk van deze waarden?

d) Welke waarden van L_x kunnen bij meting gevonden worden en wat is de waarschijnlijkheid voor elk van deze waarden?

Gebruik: $Y_{0,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$ $\qquad Y_{2,2}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\, e^{2i\varphi} \sin^2\theta$

$Y_{2,1}(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{5}{8\pi}}\, e^{i\varphi} \sin\theta\cos\theta \qquad Y_{2,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1)$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \, \sin\theta \, d\theta \; Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)\, Y_{lm}(\theta,\varphi) = \delta_{l,l'}\,\delta_{m,m'}$$

Opgave 2

Beschouw de Hamiltoniaan $H = H_0 + H_1$ waarbij H_1 als storing opgevat kan worden. De eigenwaarden en eigentoestand van H_0 zijn: $E_n^{(0)}$ en $|n\rangle$ respectievelijk. $E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)}$ $\quad E_0^{(1)} = \langle 0 | H_1 | 0 \rangle$

a) Leid af dat in eerste-orde verstoring

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad \text{en} \quad H_1 = C x^4$$

b) We nemen nu $E_0^{(1)} = 0$

Bepaal E_0.

c) Beredeneer op grond van pariteit dat in het geval $H_1 = Cx^3$ en H_0 onveranderd er geldt:

$$\langle x | 0 \rangle = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad \text{en genormeerd}$$

Gebruik: 1) $\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$

2) $\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{(2a)^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Opgave 3

a) $\vec{n}$ is een willekeurige eenheidsvector. Laat zien dat:
$\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{bmatrix}$, waarbij $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ de Pauli spin-matrices voorstellen.

b) Verifieer $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = 1$

c) De meest algemene spin-golffunctie voor een deeltje met spin $= \frac{1}{2}\hbar$ is een superpositie van de eigenfuncties van L_z met eigenwaarden $\pm \frac{1}{2}\hbar$. Verklaar.

d) Bepaal de twee eigenwaarden van de operator
$A = e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}$

e) Bepaal de bij deze eigenwaarden behorende eigenfuncties in spinorvorm (d.w.z. als 2-dim kolom matrix)

f) Bewijs dat A een unitaire operator is (d.w.z. $AA^+ = A^+A = I$) en geschreven kan worden als:

$A = \cos\theta . I + i\sin\theta\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})$ waarbij I de 2x2 eenheidsmatrix voorstelt.

Opgave 4

Beschouw een systeem bestaande uit twee identieke fermionen. Het ruimtelijk deel van de golffunctie voor ieder fermion afzonderlijk is een Gauss-verdeling gecentreerd rond $x = a$ respectievelijk $x = -a$:

$$\psi_1(x) = \frac{\mu^{1/2}}{\pi^{1/4}} e^{-\mu^2(x-a)^2/2} \quad \text{en} \quad \psi_2(x) = \frac{\mu^{1/2}}{\pi^{1/4}} e^{-\mu^2(x+a)^2/2}$$

a) Ga na of $\psi_1(x)$ en $\psi_2(x)$ genormeerd zijn. Zoniet, bepaal de normalisatie constante.

Hint: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Het spindeel van de golffunctie van de twee fermionen is symmetrisch ($L_1 = L_2$)

b) Bepaal de correct genormeerde ruimtelijke golffunctie van het systeem.

c) Hoe groot moet $|a|$ zijn opdat de effecten van het Pauli-principe kleiner dan 10^{-3}.

Het spindeel van de golffunctie van de twee fermionen is symmetrisch ($L_1 = -L_2$)

d) Bepaal de correct genormeerde ruimtelijke golffunctie van het systeem.

e) Bepaal de waarschijnlijkheidsverdeling $P(x)$ voor de afstand tussen beide deeltjes $x = x_1 - x_2$ voor de in onderdeel b) en d) bepaalde golffuncties.

Geef aan wat de verschillen tussen beide waarschijnlijkheids-verdelingen zijn en wat daarvan de fysische achtergrond is.

Hint: Ga over op de variabelen $x = x_1 - x_2$ en $X = \frac{x_1 + x_2}{2}$